Revista Eletrônica Multidisciplinar de Investigação Científica
ISSN: 2764-4987
DOI: https://doi.org/10.56166/remici.2023.6.v2n4.7.39

LIMITES E CONTINUIDADE LOCAL: APLICAÇÕES NA FÍSICA

Limits and Local Continuity: Applications in Physics

Gabriel Costa Vieira Arantes[1]
Clóves Gonçalves Rodrigues[2]

RESUMO

Os conceitos de limite e continuidade são fundamentais para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. Por sua vez, os teoremas do cálculo são inerentes ao campo da matemática conhecido por análise real. Sem dúvida, as ferramentas do cálculo são indispensáveis para o estudo dos fenômenos físicos. Sendo assim, a proposta deste artigo é investigar as possíveis contribuições e aplicações dos teoremas sobre limites e continuidade, provenientes da análise real, para o desenvolvimento de alguns temas em Física. O método empregado consiste na investigação teórica de diversos fenômenos físicos que podem ser modelados através das definições de limite e continuidade local. O intuito é potencializar o rigor matemático no estudo da Física, aliando-a aos teoremas da análise real.

Palavras-chave: Limite, Continuidade Local, Análise Real.

ABSTRACT

The concepts of limit and continuity are fundamental for the development of differential and integral calculus. In turn, calculus theorems are inherent to the field of mathematics known as real analysis. Undoubtedly, the tools of calculus are indispensable for the study of physical phenomena. Therefore, the purpose of this article is to investigate the possible contributions and applications of theorems about limits and continuity, arising from real analysis, for the development of some topics in Physics. The method employed consists of the theoretical investigation of several physical phenomena that can be modeled through the definitions of limit and local continuity. The aim is to enhance mathematical rigor in the study of Physics, combining it with the theorems of real analysis.

Key-words: Limit, Local Continuity, Real Analysis.

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho serão abordados dois conceitos de extrema importância para a análise real: limites de funções e continuidade local. A noção de limite constitui-se na essência da análise (ARANTES, 2023). Na próxima seção será apresentada a definição formal de limite para funções, bem como os teoremas resultantes desta definição. O Teorema 1, apresentado na próxima seção, mostra que os limites de funções são casos mais genéricos dos limites de sequências. Com efeito, é importante que o leitor perceba, ao longo deste trabalho, que muitos conceitos, definições e teoremas referentes a limites de funções se assemelham aos casos análogos para limites de sequências. No

[1] Graduado em Física e Química, PUC Goiás, gabriel.prof.exatas@gmail.com
[2] Doutor em Física, IFGW-Unicamp, cloves@pucgoias.edu.br

ISSN: 2764-4987
DOI: https://doi.org/10.56166/remici.2023.6.v2n4.7.39

entanto, as funções permitem o estudo de uma noção que não se aplica às sequências: a continuidade. A definição formal de continuidade virá em seguida dos limites de funções. Afinal, a noção de continuidade é um caso particular destes. Neste trabalho será abordada especificamente a continuidade local de funções. Existe também uma noção mais genérica de continuidade, denominada continuidade uniforme, porém esta será abordada em um futuro trabalho.

Os conceitos de limite e continuidade são muito valiosos para o estudo da física, com destaque para a física matemática. Todos os fenômenos físicos que são modelados através de derivadas, integrais ou mesmo equações diferenciais possuem uma relação intrínseca com as noções de limite e continuidade. Basta pensar num exemplo clássico: o teorema fundamental do cálculo. Sempre que se aplica uma integral definida sobre um intervalo do domínio de uma função que modela um determinado fenômeno físico, no fundo está sendo aplicando o limite de um somatório, pois a integral nada mais é do que a soma de infinitas parcelas infinitesimais. Além disso, a fim de aplicar o teorema fundamental do cálculo, é necessário que a função que descreve o fenômeno físico seja contínua no intervalo do seu domínio que se deseja integrar. Muitas vezes, é crucial para um físico saber se determinada função é contínua em todo o seu domínio, pois, no caso afirmativo, conclui-se que esta função é integrável. Para isso, é importante ressaltar que a análise real fornece teoremas valiosos que permitem determinar a continuidade de funções em diversos casos. Pode-se afirmar que as noções de limite e continuidade local constituem importantes ferramentas no estudo da diferenciabilidade e primitivação das funções que modelam diversos fenômenos da natureza.

As contribuições e aplicações práticas das noções de limite e continuidade na física serão apresentadas na Seção 3. Faz-se necessário, todavia, apresentar neste momento inicial os conceitos, definições e teoremas mais importantes da Análise Real no que se refere aos limites de funções e continuidade local, antes de se prosseguir para as aplicações na Seção 3.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A princípio, é necessária uma noção muito importante, advinda da topologia da reta real, que é a definição de ponto de acumulação. Diz-se que $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando $(X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta) \neq \emptyset$ para todo $\delta > 0$. Equivalentemente, diz-se que $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando existe uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ tal que $\lim x_n = a$. O conjunto dos pontos de acumulação de X será representado por X'.

ISSN: 2764-4987
DOI: https://doi.org/10.56166/remici.2023.6.v2n4.7.39

Considere a função $f: X \to \mathbb{R}$. Seja $a \in X'$ um ponto de acumulação. Diz-se que o limite de $f(x)$ quando x tende para a é igual a L e escreve-se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ quando, para todo intervalo aberto no contradomínio de f com centro em L e raio $\varepsilon > 0$ contendo pontos da imagem $f(X) \subset \mathbb{R}$, existe um intervalo aberto correspondente no domínio de f com centro em a e raio $\delta > 0$ que contém pontos $x \in X - \{a\}$. Simbolicamente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L . \equiv . \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon .$$

Pode-se ainda afirmar que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L . \equiv . \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) .$$

Em linguagem mais informal, se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ então é possível tornar $f(x)$ tão próxima de L quanto se queira, desde que x esteja suficientemente próximo, porém, diferente de a. Na primeira definição em símbolos, a restrição $0 < |x - a|$ significa que $x \neq a$. Portanto, a variável $x \in X$ não assume o valor do ponto de acumulação $a \in X'$ quando se escreve $\lim_{x \to a} f(x) = L$, ou seja, o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ pode existir mesmo que $f(a)$ não esteja definida.

A seguir serão apresentados alguns importantes teoremas referentes a limites de funções.

Teorema 1: *Sejam $f: X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Para toda sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$, tem-se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se $\lim f(x_n) = L$.* (LIMA, 2019; LIMA, 2020)

Demonstração: Inicialmente, tem-se por hipótese que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim x_n = a$ para todo $x_n \in X - \{a\}$. Utilizando as definições de limites de sequências e limites de funções simultaneamente. Dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ e $n > n_0 \Rightarrow 0 < |x_n - a| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - L| < \varepsilon$. Logo, tem-se $\lim f(x_n) = L$. Reciprocamente, por hipótese tem-se que $\lim f(x_n) = L$ para toda sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$. Deseja-se provar que isto implica em $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Fazendo, por absurdo, que esta implicação não acontece. Então, existiria um número $\varepsilon > 0$ com a propriedade: para todo $n \in \mathbb{N}$, pode-se obter $x_n \in X - \{a\}$ tal que $0 < |x_n - a| < 1/n \Rightarrow |f(x_n) - L| \geq \varepsilon$. Resultaria daí que $\lim f(x_n) \neq L$, absurdo, pois contraria a

Revista Eletrônica Multidisciplinar de Investigação Científica
ISSN: 2764-4987
DOI: https://doi.org/10.56166/remici.2023.6.v2n4.7.39

hipótese. Note que na recíproca foi tomado $\delta = 1/n$ a fim de evitar a declaração de um novo número > 0 arbitrário. Isto pode ser feito porque $(1/n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}(1/n) = 0$. ∎

O Teorema 1 traduz que a definição formal de limite para funções é essencialmente uma generalização dos limites de sequências. Isto porque o resultado demonstrado no Teorema 1 revela que o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ equivale a afirmar a existência de duas sequências (x_n) e $f(x_n)$ tais que, à medida que x_n tende para $a \in X'$, a sua imagem $f(x_n)$ tende para $L \in \mathbb{R}$, para todo $x_n \in X-\{a\}$. É com base no Teorema 1 que grande parte dos livros de cálculo introduzem o estudo dos limites de funções a partir de uma noção intuitiva, onde demonstra-se a convergência da imagem $f(x)$ para o valor L à medida que se aproxima o argumento x do ponto de acumulação a, porém sem tornar $x = a$. Um exemplo desta noção intuitiva de limite, que se baseia no resultado do Teorema 1, está ilustrado na Tabela 1, onde é calculado o limite indeterminado $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)/\ln(x) =-1$.

Tabela 1: Cálculo intuitivo do limite indeterminado $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)/\ln(x) = -1$ com base no Teorema 1.

$\boldsymbol{x \to 1^-}$	0,5000	0,9000	0,9900	0,9990	0,9995	0,9999
$\boldsymbol{f(x) = (1-x)/\ln(x)}$	– 0,7213	– 0,9491	– 0,9949	– 0,9994	– 0,9997	– 0,9999

$\boldsymbol{x \to 1^+}$	1,5000	1,1000	1,0100	1,0010	1,0005	1,0001
$\boldsymbol{f(x) = (1-x)/\ln(x)}$	– 1,2331	– 1,0492	– 1,0050	– 1,0005	– 1,0002	– 1,0000

Fonte: Autoria própria (2023).

Teorema 2 (Teorema do Sanduíche para funções): *Sejam* $f, g, h\colon X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$ *e* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = L$. *Se* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in X-\{a\}$ *então* $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$. (LIMA, 2019; LIMA, 2020)

Demonstração: Seja $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = L$. Dado $\varepsilon > 0$, segue da definição de limite que existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que $x \in X$, $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon \Leftrightarrow L-\varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ e $x \in X$, $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-L| < \varepsilon \Leftrightarrow L-\varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$. Além disso, por hipótese tem-se que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X-\{a\}$. Então, basta tomar $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Deste modo, $x \in X$, $0 < |x-a| < \delta$ implicará simultaneamente em $L-\varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, $L-\varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$ e $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Ou seja: $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow L-\varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Portanto, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$. ∎

ISSN: 2764-4987
DOI: https://doi.org/10.56166/remici.2023.6.v2n4.7.39

O Teorema do Sanduíche para funções (Teorema 2) pode ser empregado no cálculo de diversos limites indeterminados com grande relevância para a Análise, assim como a sua versão análoga para sequências. Um exemplo clássico é o cálculo do limite fundamental trigonométrico, dado por $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x)/x = 1$. A fim de provar esta igualdade, serão utilizados o teorema do sanduíche e algumas noções de trigonometria. Reduzindo ao primeiro quadrante do círculo trigonométrico, sem perda de generalidade, tem-se que para todo $0 < x < \pi/2$ vale a desigualdade $\operatorname{sen}(x) < x < \operatorname{tg}(x)$ $\Rightarrow\ \operatorname{sen}(x) < x < \operatorname{sen}(x)/\cos(x)\ \Rightarrow\ 1 < x/\operatorname{sen}(x) < 1/\cos(x)\ \Rightarrow\ \cos(x) < \operatorname{sen}(x)/x < 1$. Daí, tem-se $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$ e $\lim_{x\to 0} 1 = 1$. Além disso, a função $f(x) = \operatorname{sen}(x)/x$ é par para todo $-\pi/2 < x < \pi/2$. Então, segue do teorema do sanduíche que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x)/x = 1$.

A definição formal de limite, também conhecida por definição épsilon-delta, permite a formulação de um conceito ainda mais profundo, que é a continuidade de funções. Neste trabalho, será analisada mais especificamente a continuidade local, ou continuidade pontual. Deve-se observar que existe uma noção ainda mais forte de continuidade, denominada continuidade uniforme.

Em notação usual, diz-se que uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua localmente no ponto $a \in X$, ou simplesmente contínua em $a \in X$, quando $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. É necessário, porém, investigar mais a fundo a ideia de continuidade local, também chamada de continuidade pontual. Os principais teoremas deste trabalho resultam desta noção. Para isso, a sua definição formal, será dada utilizando a notação épsilon-delta. A função $f(x)$ é dita contínua no ponto $a \in X$ quando, para todo intervalo aberto no contradomínio de f com centro em $f(a)$ e raio $\varepsilon > 0$ contendo pontos da imagem $f(X) \subset \mathbb{R}$, existe um intervalo aberto correspondente no domínio de f com centro em a e raio $\delta > 0$ que contém pontos $x \in X$. Em símbolos, significa que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) .\equiv. \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\,.$$

Pode-se afirmar ainda que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) .\equiv. \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in X \cap (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)\,.$$

É importante perceber que a noção de continuidade local assegura que a função é contínua apenas nas vizinhanças de um ponto específico do seu domínio, que permanece fixo. Esta vizinhança é o conjunto aberto denotado por $V = (a - \delta, a + \delta)$. Logo, se f é contínua em a, então f é contínua para todo $x \in X \cap V$. A extensão da vizinhança $V = (a - \delta, a + \delta)$ dependerá do valor de $\delta > 0$, que por sua vez depende do valor de $\varepsilon > 0$ dado. Além disso, ao contrário da definição de limite apresentada anteriormente, na definição de continuidade local o elemento $a \in X$ não é ponto de acumulação, pois neste caso a função $f: X \to \mathbb{R}$ deve estar definida no ponto $a \in X$ a fim de que seja $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. A seguir serão apresentados os teoremas mais importantes da Análise no que se refere à continuidade local de funções.

Teorema 3: *Sejam $f(X) \subset Y$ e $b = f(a)$. Se $f: X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ e $g: Y \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $b \in Y$ tal que a composta $g \circ f: X \to \mathbb{R}$ está bem definida, então $g \circ f$ é contínua no ponto $a \in X$. Em outras palavras, a composta de duas funções contínuas é uma função contínua.* (LIMA, 2019; LIMA, 2020)

Demonstração: Sejam $f(X) \subset Y$ e $b = f(a)$. Dado $\varepsilon > 0$, a continuidade de $g: Y \to \mathbb{R}$ no ponto $b \in Y$ assegura a existência de um número $\eta > 0$ tal que $y \in Y$, $|y - b| < \eta \Rightarrow |g(y) - g(b)| < \varepsilon$. Além disso, a continuidade de $f: X \to \mathbb{R}$ no ponto $a \in X$ assegura a existência de um número $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \eta$. A hipótese $f(X) \subset Y$ implica em $f(x) = y \in Y$. Então $x \in X$, $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |y - b| < \eta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| = |g(y) - g(b)| < \varepsilon$. Por conseguinte, tem-se $|g \circ f(x) - g \circ f(a)| < \varepsilon$ para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$. Segue da definição de continuidade local que a composta $g \circ f: X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$. ■

Dado $\varepsilon > 0$, é dito que a função $f: X \to \mathbb{R}$ é contínua em todo o domínio, ou simplesmente contínua, quando existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ para todo $a \in X$. Noutra notação, $f: X \to \mathbb{R}$ contínua $\Leftrightarrow x \in X \cap (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ para todo $a \in X$. Esta noção será muito importante para o Teorema 4 a seguir.

Teorema 4 (Teorema do Valor Intermediário): *Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.* (LIMA, 2019; LIMA, 2020)

Demonstração: A fim de provar este teorema, será admitido como verdade que todo intervalo fechado da reta só admite a cisão trivial. Este resultado é proveniente da topologia. Em outras palavras, seja $[a, b] \subset \mathbb{R}$, então a cisão $[a, b] = A \cup B$ implica em $A \cap B \neq \emptyset$ (LIMA, 2019). Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e $f(a) < d < f(b)$. Sejam os conjuntos auxiliares $A = \{x \in [a, b]; f(x) \leq d\}$ e $B = \{x \in [a, b]; f(x) \geq d\}$. A hipótese $f(a) < d < f(b)$ implica em $A \cap B = \{x \in (a, b); f(x) = d\}$. Além disso, é óbvio que $[a, b] = A \cup B$. Existem duas possibilidades. Se $A \cap B \neq$

ISSN: 2764-4987
DOI: https://doi.org/10.56166/remici.2023.6.v2n4.7.39

$\emptyset$, então deve existir $c \in A \cap B$ tal que $f(c) = d$. Por outro lado, se fosse $A \cap B = \emptyset$, então $[a, b] = A \cup B$ seria uma cisão não-trivial, absurdo, pois um intervalo fechado da reta só admite a cisão trivial. Logo, deve ser $A \cap B \neq \emptyset$ e o teorema está provado. Observação: a continuidade da função $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é indispensável como hipótese deste teorema, pois isto garante que f está definida em todos os pontos do seu domínio, assegurando a existência de $c \in (a, b)$ tal que $f(a) < f(c) = d < f(b)$. ■

Teorema 5: *Sejam $[a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua injetiva. Se $f(a) < f(b)$, então f é monótona crescente. Se $f(a) > f(b)$, então f é monótona decrescente.* (LIMA, 2019; LIMA, 2020)

Demonstração: Sejam $[a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua injetiva. Seja inicialmente o caso $f(a) < f(b)$. Por absurdo, se f não fosse crescente, então existiriam pontos $x < y \in [a, b]$ tais que $f(x) > f(y)$. Existem então duas possibilidades. Na primeira, $f(y) > f(a)$ implicaria em $f(a) < f(y) < f(x)$. Por conseguinte, o teorema do valor intermediário garantiria a existência de $c \in (a, x)$ tal que $f(c) = f(y)$, absurdo, pois contraria a injetividade de $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Na segunda, $f(y) < f(a)$ implicaria em $f(y) < f(a) < f(b)$. Por conseguinte, o teorema do valor intermediário garantiria a existência de $c \in (y, b)$ tal que $f(c) = f(a)$, absurdo, pois contraria novamente a injetividade de $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Logo, f deve ser monótona crescente. O caso $f(a) > f(b)$ se prova de forma análoga. ■

Teorema 6: *Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$ intervalos da reta. Toda bijeção contínua $f: X \to Y$ possui inversa contínua $g = f^{-1}: Y \to X$.* (LIMA, 2019; LIMA, 2020)

Demonstração: Tomando $a \in X$ arbitrário, será demostrado que $g: Y \to X$ é contínua no ponto $f(a) \in Y$. Por absurdo, se g não fosse contínua em $f(a)$, então existiria um número $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $n \in \mathbb{N}$, pode-se encontrar uma sequência $(f(x_n)) \in Y$ tal que $|f(x_n) - f(a)| < 1/n \Rightarrow |g \circ f(x_n) - g \circ f(a)| \geq \varepsilon$. Como $g = f^{-1}$, tem-se $g \circ f = id_X: X \to X$, logo $g \circ f(x_n) = x_n$ e $g \circ f(a) = a$. Então, seguindo a hipótese de absurdo, tem-se $|x_n - a| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Resultaria daí que $\lim f(x_n) = f(a)$, porém $\lim x_n \neq a$. Isto impossibilitaria a existência do limite $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ que assegura a continuidade de $f: X \to Y$. Logo, chega-se a uma contradição, pois f é uma bijeção contínua por hipótese. ■

ISSN: 2764-4987
DOI: https://doi.org/10.56166/remici.2023.6.v2n4.7.39

Nesta seção a teoria principal da Análise sobre limites de funções e continuidade local foi fundamentada. Na próxima seção serão apresentadas algumas de suas aplicações no campo da física.

3. APLICAÇÕES

Nesta seção serão apresentados exemplos práticos e aplicações das noções de limite e continuidade na Física, a saber: teorema do sanduíche e movimento harmônico amortecido, limites e entropia na terceira lei da termodinâmica clássica, teorema do valor intermediário, e método da bisseção e aplicações na física.

3.1 Teorema do Sanduíche e Movimento Harmônico Amortecido

Aqui será analisado um caso particular do Movimento Harmônico Amortecido (MHA), onde a força restauradora prevalece sobre a força de atrito, havendo a diminuição gradativa na amplitude do movimento em função do tempo, de modo que as oscilações descritas pelo corpo convirjam para a sua posição de equilíbrio (NETO, 2013). Este é o Movimento Harmônico Sub-Amortecido (MHSA). Este é um problema clássico da mecânica, sendo frequentemente estudado nos cursos básicos de física na graduação. O sistema que descreve um MHSA é chamado de Oscilador Harmônico Sub-Amortecido (OHSA). A convergência das oscilações descritas pelo OHSA será examinada utilizando o teorema do sanduíche provado na Seção anterior. Seja $F_{at} = -b(dx/dt)$ a força de atrito que atua sobre o corpo e $F_{el} = -kx$ a força elástica restauradora da mola, responsável pelas oscilações no MHSA. Então, pela 2ª Lei de Newton, tem-se:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{el} + \vec{F}_{at} \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0\,,$$

onde $\gamma = b/m$ e $\omega_0^2 = k/m$. Assim, foi obtida uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) homogênea de segunda ordem (RODRIGUES, 2017), cuja solução é dada pela função:

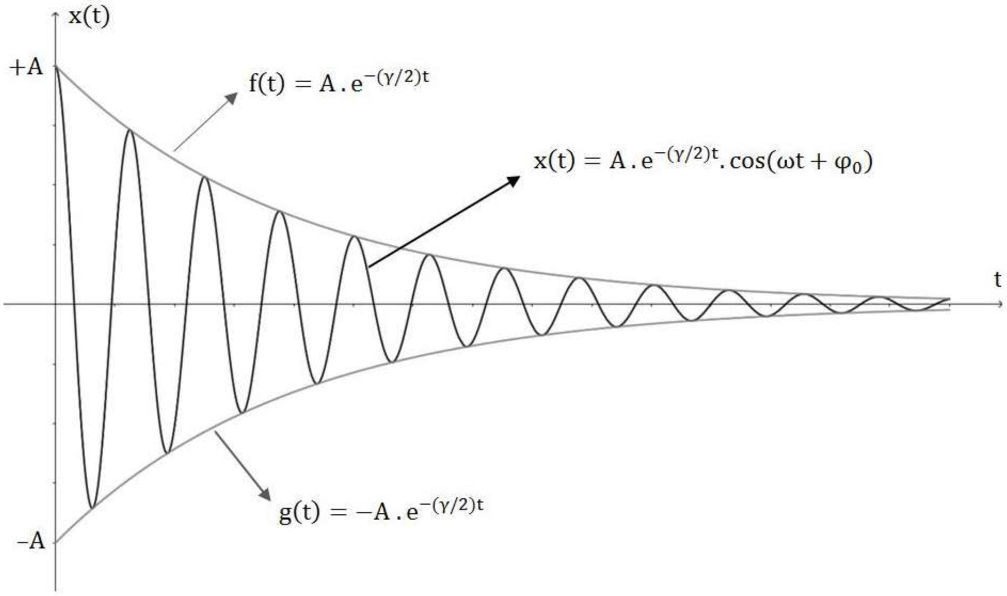
$$x(t) = Ae^{-\gamma\ /2}\cos(\omega t + \varphi_0)\,,$$

que descreve a equação de movimento do Oscilador Harmônico Sub-Amortecido. Nesta expressão, $x(t)$ é a posição do corpo em função do tempo, A é a amplitude do movimento, γ é a grandeza que

ISSN: 2764-4987
DOI: https://doi.org/10.56166/remici.2023.6.v2n4.7.39

caracteriza o efeito da força de atrito, ω é a frequência angular de oscilação e φ_0 é a fase inicial do movimento. A Figura 1 mostra o gráfico da função $x(t)$ e o seu "envelope", isto é, o par de funções que limitam $x(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$, sendo $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2/4$.

Figura 1 – Posição de um Oscilador Harmônico Sub-Amortecido em função do tempo.



Fonte: Autoria própria (2023).

É fácil comprovar a veracidade do gráfico ilustrado na Figura 1. Basta notar que:

$$-1 \leq \cos(\omega t + \varphi_0) \leq 1$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Então, multiplicando os termos da desigualdade por $Ae^{-(\gamma/2)t}$, obtêm-se:

$$-Ae^{-\gamma t/2} \leq Ae^{-\gamma t/2}\cos(\omega t + \varphi_0) \leq Ae^{-\gamma t/2}$$

$$\therefore g(t) \leq x(t) \leq f(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}^+.$$

A convergência do par de funções $f(t)$ e $g(t)$ que definem o envelope de $x(t)$ pode ser analisada utilizando a noção de limite:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} Ae^{-\gamma t/2} = Ae^{-\infty} = 0\,,$$

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty} -Ae^{-\gamma t/2} = -Ae^{-\infty} = 0\,,$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} g(t) = 0\,.$$

Por conseguinte, o teorema do sanduíche assegura que $g(t) \leq x(t) \leq f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} g(t) = 0$ implicam em $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Deste modo, comprova-se que as oscilações descritas pelo MHSA de fato convergem para a posição de equilíbrio do sistema à medida que $t \to \infty$. Conforme discutido previamente, isto ocorre em virtude da força de atrito que atua sobre o oscilador.

3.2 Limites e Entropia na Terceira Lei da Termodinâmica Clássica

A Terceira Lei da Termodinâmica Clássica foi postulada pelo químico alemão Walther Nernst (1864-1941) por volta de 1906 (BORGNAKKE; SONNTAG, 2013). Nernst sentiu a necessidade de formular seu novo teorema sobre o calor ao investigar o critério de espontaneidade proposto pelo químico francês Marcellin Berthelot (1827-1907). Este critério afirmava que uma reação termoquímica é espontânea se e somente se $\Delta U < 0$, onde ΔU é a variação da energia interna do sistema. Nernst observou experimentalmente que este critério é válido somente para baixas temperaturas. Então, baseando-se na definição de energia livre proposta pelo físico alemão Hermann von Helmholtz (1821-1894) em 1882, dada por $F = U - TS$, onde F é a energia livre de Helmholtz, T é a temperatura absoluta da vizinhança, U é a energia interna e S é a entropia do sistema, Nernst reformulou o critério da espontaneidade postulado por Berthelot, afirmando que uma reação termoquímica é espontânea quando $\Delta F < 0$. Para isso, Nernst admitiu a validade da relação $\Delta F = \Delta U - T\Delta S$ proveniente da definição de energia livre, devida a Helmholtz. Deste modo, Nernst postulou que, no gráfico da energia em função da temperatura de uma reação termoquímica arbitrária, as curvas correspondentes às grandezas ΔU e ΔF convergem assintoticamente entre si à medida que $T \to 0$, de tal forma que a reta tangente comum a ambas em $T = 0$ é paralela ao eixo das abscissas, isto é, ao eixo da temperatura. Em notação diferencial, o postulado de Nernst pode ser representado da seguinte maneira:

$$\frac{d}{dT}\Delta U = \frac{d}{dT}\Delta F = 0 \therefore \frac{d}{dT}(\Delta U - \Delta F) = 0\,,$$

quando $T \to 0$. Por conseguinte, tem-se $\lim_{T\to 0}(\Delta U - \Delta F) = 0$. Prosseguindo, a relação termodinâmica $\Delta F = \Delta U - T\Delta S$, fornece:

$$\Delta S = \frac{\Delta U - \Delta F}{T}.$$

Aplicando os limites com $T \to 0$ em ambos os lados da igualdade, tem-se:

ISSN: 2764-4987
DOI: https://doi.org/10.56166/remici.2023.6.v2n4.7.39

$$\lim_{T\to 0} \Delta S = \lim_{T\to 0} \frac{\Delta U - \Delta F}{T}.$$

Esta expressão é um limite indeterminado do tipo $0/0$. Logo, a Regra de L'Hôpital pode ser aplicada:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a}[f(x)/g(x)] = \lim_{x\to a}[f'(x)/g'(x)],$$

onde $f'(x) = df/dx$ e $g'(x) = dg/dx$. Procedendo desta maneira, tem-se:

$$\lim_{T\to 0} \Delta S = \lim_{T\to 0} \frac{\Delta U - \Delta F}{T} = \lim_{T\to 0} \frac{d(\Delta U - \Delta F)/dT}{dT/dT} = \lim_{T\to 0} \left[\frac{d}{dT}(\Delta U - \Delta F)\right] = 0.$$

isto é, decorre diretamente do postulado de Nernst, referente ao critério de espontaneidade das reações termoquímicas, que:

$$\lim_{T\to 0} \Delta S = 0.$$

Esta equação define matematicamente a Terceira Lei da Termodinâmica Clássica, postulada por Walther Nernst em 1906 da seguinte maneira: "Tomando a temperatura absoluta de um processo termodinâmico tão próxima de zero quanto se queira, a variação na entropia do sistema torna-se nula". Equivalentemente, pode-se dizer que: "A variação de entropia torna-se nula à medida que a temperatura se aproxima do zero absoluto".

3.3 Teorema do Valor Intermediário, Método da Bisseção e Aplicações na Física

Uma das aplicações mais interessantes do teorema do valor intermediário é o método da bisseção, ferramenta muito útil do cálculo numérico cujo algoritmo permite determinar, com grande precisão, as raízes de funções contínuas por meio de iterações sucessivas (BURDEN; FAIRES, 2010). Este método é muito valioso para a Física, pois existem diversas funções contínuas cujas raízes não podem ser resolvidas analiticamente. Muitas funções deste tipo são transcendentes e estão frequentemente associadas a fenômenos quânticos. Outra vantagem do método da bisseção é a simplicidade do seu algoritmo, a saber: seja $f: X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Inicialmente, precisa ser encontrado um intervalo $[a, b] \subset X$ tal que $f(a). f(b) < 0$. Então, certamente $f(a)$ e $f(b)$ possuem sinais opostos. A partir daí pode-se inferir, sem perda de generalidade, que $f(a) < 0 < f(b)$. Além disso, tem-se $a < b$. Portanto, o teorema do valor intermediário assegura a existência de $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Ou seja, existe uma raiz $c \in \mathbb{R}$ da função contínua $f: X \to \mathbb{R}$ tal que $a < c < b$. O método da bisseção consiste num algoritmo sistemático para a obtenção deste valor $c \in (a, b)$. Tomando a média aritmética $d = (a + b)/2$ dos extremos do intervalo $[a, b]$. Logo, o número $d \in$

ISSN: 2764-4987
DOI: https://doi.org/10.56166/remici.2023.6.v2n4.7.39

$\mathbb{R}$ será o centro deste intervalo. Existem três possibilidades. Se $f(d) = 0$, então por coincidência a raiz procurada é exatamente o ponto médio do intervalo $(a, b) \subset X$, não sendo necessário prosseguir com o algoritmo. Se $f(d) < 0 < f(b)$, então pelo teorema do valor intermediário deve existir um número $c \in (d, b)$ tal que $f(c) = 0$. Note que o intervalo $[d, b]$ tem a metade do comprimento do intervalo $[a, b]$. Portanto, isto significa que o erro de aproximação do método caiu pela metade com a primeira iteração, ou seja, a raiz procurada está mais próxima do valor real. Por último, se $f(a) < 0 < f(d)$, então novamente pelo teorema do valor intermediário deve existir um número $c \in (a, d)$ tal que $f(c) = 0$. Pelas mesmas razões do caso anterior, pode-se afirmar que esta iteração reduziu o erro de aproximação do método pela metade, obtendo um valor mais próximo do valor real da raiz procurada. A repetição sucessiva dos passos descritos anteriormente fornece uma excelente aproximação para a raiz da função contínua $f: X \to \mathbb{R}$ investigada, dada a margem de erro tolerada pela aplicação desejada.

4. COMENTÁRIOS FINAIS

Com as investigações conduzidas neste artigo, nota-se que a formalização matemática, obtida através dos teoremas rigorosamente demonstrados pela Análise Real, proporciona ferramentas valiosas na descrição dos fenômenos da natureza, de interesse na Física. Em particular, a definição formal dos limites e da continuidade pontual se mostrou bastante eficaz na compreensão teórica de fenômenos tais como: movimento harmônico amortecido, lei da termodinâmica e método da bisseção, sendo este último um método numérico. Isto serve como motivação para defender o rigoroso emprego dos teoremas da Matemática para o estudo da Física, pois este rigor conduz a interpretações mais sólidas dos fenômenos.

REFERÊNCIAS

ARANTES, G. C. V.; RODRIGUES, C. G. Sequências, séries de funções e suas aplicações na física quântica. **Studies in Multidisciplinary Review**, Curitiba, v. 4, n. 1, 137-157, jan. 2023. Disponível em: < https://doi.org/10.55034/smrv4n1-011>. Acessado em: Mai. 2023.

BORGNAKKE, C.; SONNTAG, R. E. **Fundamentos da Termodinâmica**. Série Van Wylen, 8ª Edição. São Paulo: Blucher, 2013.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Numerical Analysis**, ninth edition. Boston: Cengage Learning, 2010.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**, v. 1. Projeto Euclides. 14ª Edição. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. 2019.

LIMA, E. L. **Análise Real, v. 1: Funções de Uma Variável**. Coleção Matemática Universitária. 12ª Edição, 4ª impressão. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.

NETO, J. B. **Mecânica: Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana**, 2ª Edição. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

RODRIGUES, C. G. **Tópicos de Física Matemática para Licenciatura**. São Paulo: Editora LF, 2017.